DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A

l'Ecole Nationale Supérieure des Ingénieurs des Etudes et Techniques d'Armement 1991

MATHEMATIQUES 1 **Options M, P et TA** **Durée : 4 heures**

PREMIERE PARTIE

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. On considère les deux suites (a_n) et (b_n) définies par :

$a_0 = a$ et $b_0 = b$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}$$

1 - Montrer que ces suites sont bien définies.

2 - Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq b_n$.

3 - Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes. On notera $M(a, b)$ leur limite commune.

4 - Démontrer que, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$:

a - $M(b, a) = M(a, b)$

b - $M(ca, cb) = c\,M(a, b)$

c - $M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$

5 - Démontrer que $(a_{n+1} - b_{n+1}) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8\,M(a,b)}$.

DEUXIEME PARTIE

Pour $x \in [0, 1[$, on pose $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}}$

1 - Démontrer que Φ est définie et continue sur $[0, 1[$.

A SUIVRE

2 - Démontrer, sans calcul de dérivée, que Φ est croissante sur $[0, 1[$.

3 - Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on pose : $\sin\theta = \dfrac{(1+x)\sin t}{1 + x\sin^2 t}$.

a - Démontrer que cette relation définit une application

$u : [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [0, \frac{\pi}{2}]$, avec $\theta = u(t)$.

b - Démontrer que $u \in C^1([0, \frac{\pi}{2}])$.

c - Démontrer que u est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d - Démontrer que u est un C^1-difféomorphisme de $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $[0, \frac{\pi}{2}]$.

4 - Démontrer :

a) $\cos\theta = \dfrac{\cos t}{1 + x\sin^2 t}\sqrt{1 - x^2\sin^2 t}$

b) $\dfrac{1 - x\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t} = \sqrt{1 - \dfrac{4x}{(1+x)^2}\sin^2\theta}$

c) $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}\Phi\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$

5 - Soit $0 < b \le a$, et soit : $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}$

Montrer que $I(a,b) = \dfrac{1}{a}\Phi\left(\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right)$, et en déduire : $I(a,b) = I\left(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$.

6 - Les suites (a_n) et (b_n) étant définies comme à la première partie, montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ I(a_n, b_n) = I(a,b)$.

En déduire : $I(a,b) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(a,b)}$.

7 - Démontrer que : $\forall x \in [0, 1[\quad , \quad \Phi(x) = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{M(1, \sqrt{1 - x^2})}$

Tournez la page S.V.P.

TROISIEME PARTIE

1 - Donner le développement en série entière de $f(X) = \dfrac{1}{\sqrt{1+X}}$.

Quel est le rayon de convergence de ce développement ?

2 -

a - Calculer, en fonction de n, $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t \, .dt$

b - Démontrer que $\forall x \in [0, 1[$: $\Phi(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 . x^{2n}$.

3 - Démontrer que Φ est une solution, sur $[0, 1[$, de l'équation différentielle :

$$(x^3 - x)y'' + (3x^2 - 1)y' + xy = 0 \qquad \text{(E)}$$

4 - Pour $x \in]0, 1[$, on pose : $g(x) = \Phi(\sqrt{1-x^2})$

Démontrer que g est solution de (E) sur $]0, 1[$.

5 - Démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \Phi(x) = +\infty$ (on pourra utiliser les résultats de la deuxième partie, questions 2 - et 4 - c -).

En déduire que Φ et g sont linéairement indépendantes sur $]0, 1[$.

6 - Déduire de ce qui précède l'expression de la solution générale de (E) sur $]0, 1[$ à l'aide de la fonction M définie dans la première partie.

QUATRIEME PARTIE

Soit l'intégrale généralisée $G(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt$.

1 - Pour quelles valeurs de α cette intégrale est-elle convergente ?

2 - On suppose <u>dans toute la suite</u> que $\alpha \geq 0$.

Soit $a \in \mathbb{R}_+$, et soit $J(\alpha, a) = \displaystyle\int_0^a t^\alpha e^{-t^2} dt$.

On considère $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq a \, ; 0 \leq y \leq a \}$.

A SUIVRE

Démontrer que $\left[J(\alpha, a)\right]^2 = \iint_{\Delta} x^{\alpha} y^{\alpha} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$.

3 - Soit $\Delta_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$

$\Delta_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0 \ ; \ y \geq 0 \ ; \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\sqrt{2}\}$

Justifier, à l'aide d'un graphique, la double inégalité :

$$\iint_{\Delta_1} x^{\alpha} y^{\alpha} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy \leq \left[J(\alpha, a)\right]^2 \leq \iint_{\Delta_2} x^{\alpha} y^{\alpha} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy$$

4 - Démontrer que $(G(\alpha))^2 = G(2\alpha + 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha}\theta \cos^{\alpha}\theta \, d\theta$.

5 - On pose $K(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\alpha}\theta \, d\theta$. Montrer que $[G(\alpha)]^2 = 2^{-\alpha} \ K(\alpha)\, G(2\alpha + 1)$.

6 - En déduire G(4).

7 - Démontrer que :

a) $K\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin\theta}}$ (intégrer par parties)

b) $K\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \int_0^{1} \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}$ (poser $u = \sqrt{\sin\theta}$)

c) $K\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{3.M(\sqrt{2}, 1)}$

8 -

a - Trouver une relation simple entre les intégrales $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^4}\, dx$ et $I' = \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x^4}\, dx$.

b - Déduire des questions précédentes une expression de I à l'aide de la fonction M.

FIN